



CURSO DE MATEMÁTICA

“SISTEMA DE NUMERAÇÃO”

Cícero Alves Leite
Renata Aparecida Monteiro

Osasco – 2005

CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIFIEO

CURSO DE MATEMÁTICA

“SISTEMA DE NUMERAÇÃO”

Monografia apresentada no curso de
Matemática, sob Supervisão e Orientação
da Professora Élvia Mureb Sallum na
matéria Pesquisas em Matemática II.

Cícero Alves Leite
Renata Aparecida Monteiro

Osasco – 2005

SUMÁRIO

CAPÍTULO I.....INTRODUÇÃO.....	4
1.1 A contagem no tempo das cavernas.....	5
1.2 Pastores, ovelhas e pedrinhas.....	7
1.3 Marcas, Palavras e Dedos.....	8
CAPÍTULO II.....O PRINCÍPIO DA BASE E O NASCIMENTO DOS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO	
2.1 O número e suas simbolizações.....	10
2.2 A descoberta do princípio da base.....	12
2.3 Base de um sistema de numeração.....	13
2.3.1 A origem da base dez.....	14
2.3.2 A origem das outras bases.....	15
2.3.3 A base doze.....	17
2.3.4 A origem provável do sistema sexagesimal.....	18
2.4 Sistema de numeração : decimal, binário, octal e hexadecimal..	19
CAPÍTULO III.....INTRODUÇÃO E CONVERSÃO ENTRE BASES NUMÉRICAS	
3.1 Conversões entre as bases 2, 8 e 16.....	26
3.1.1 Conversão binário – octal.....	26
3.1.2 Conversão octal – binário.....	27
3.1.3 Conversão binário – hexadecimal.....	27
3.1.4 Conversão hexadecimal – binário.....	28
3.3 Conversão de Números em uma base b qualquer para a base 10...	29

3.4 Conversão de Números em base 10 para uma base b qualquer.....	29
3.4.1 Parte inteira.....	31
3.4.2 Parte fracionária.....	32
3.5 Conversão de Números entre duas bases quaisquer.....	33

CAPÍTULO IV.....ARITMÉTICA DECIMAL E BINÁRIA

4.1 Adição	
4.1.1 Decimal / Binária.....	34
4.2 Subtração	
4.2.1 Decimal / Binária.....	37
4.3 Multiplicação	
4.3.1 Decimal / Binária.....	39
4.4 Divisão	
4.4.1 Decimal / Binária.....	41
4.5 Atividades.....	43

CAPÍTULO V.....CURIOSIDADES: COMPARANDO SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

5.1 O números no Antigo Egito.....	46
5.2 O Sistema de numeração da Mesopotâmia.....	48
5.3 A numeração Chinesa.....	51
5.4 A numeração Grega.....	53
5.5 A numeração Romana.....	54
5.6 Os maias e o número Zero.....	55
5.7 O melhor Sistema de Numeração	57

BIBLIOGRAFIA.....	58
--------------------------	-----------

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi elaborado com o objetivo de mostrar a origem dos números conforme conta a história desde o tempo das cavernas até os dias atuais. Iremos falar também sobre os diversos sistemas de numeração existentes em vários países e mostrar a importância da contagem que obteve um grande progresso e que, aos poucos, de uma forma simplória e enriquecedora, foi ocupando espaço nos dias de hoje, transformando nossa sociedade.

Porém, algumas civilizações não se contentaram com suas formas de contar e procuraram inovar seus métodos, discutindo e planejando outras formas de contagem chegando a novas conclusões.

Enfim, com tais conclusões deram origem a diversas aritméticas, entre elas, a aritmética decimal, binária e outras bases... Baseado nestas aritméticas (soma, subtração, multiplicação e divisão) pudemos descobrir a importância das posições de cada número, ou seja, de acordo com cada base em que está calculando é necessário saber em cada posição dos números qual a quantidade de dígitos máxima permitida. Ou melhor, organizar a sequência de forma regular dos números segundo uma classificação hierarquizada fundada na base utilizada.

Entretanto, nosso trabalho está ligado à Pré-História e ao mundo em que vivemos, para os conceitos básicos que necessitamos no nosso dia-a-dia.

1.1 A CONTAGEM NO TEMPO DAS CAVERNAS

Em 1940, no interior da França, alguns garotos passeavam pelo campo quando escutaram latidos de um cãozinho que caíra num buraco. À sua procura, os meninos seguiram os latidos e descobriram uma gruta enorme. Nas suas paredes, havia maravilhosas pinturas coloridas de cavalos, veados, bisões e até rinocerontes, feitas por homens que habitavam cavernas.



"Quatro veados de imensas galhadas perambulam por uma das paredes de Lascaux."

Diversas cavernas têm sido detalhadamente estudadas pelos arqueólogos, que são pesquisadores dedicados a investigar o que restou de povos e culturas do passado. No caso da caverna encontrada na França, concluiu-se que as pinturas foram feitas há cerca de 25000 anos. Pelos objetos que lá estavam, foi possível ter uma idéia de como eram e de como viviam seus habitantes.

Tudo indica que as pessoas daquele tempo eram parecidas conosco fisicamente. A diferença era a maneira de viver. Para se alimentar, caçavam e colhiam frutos e raízes. Não plantavam, não criavam animais e, por isso, não vendiam, não faziam compras e não usavam dinheiro. Assim, é provável que elas não tivessem necessidade dos números em seu dia-a-dia e, por isso, talvez não os conhecessem.

No entanto, não se pode ter certeza disso. Veja, por exemplo, o osso de lobo descoberto por arqueólogos em 1937, num lugar da Europa. Estudos indicam que esse osso tem aproximadamente 30000 anos, quer dizer, é do tempo em que os europeus habitavam cavernas.

Percebeu os risquinhos desenhados no osso? Há razões para crer que essas marcas sejam o registro de alguma contagem. No entanto, 30000 anos atrás, o que a teria motivado, já que a vida cotidiana não necessitava de contagens?



Segundo alguns cientistas, aqueles homens poderiam ter usado números por motivos religiosos. Em todas as culturas, as cerimônias religiosas costumam ter épocas e durações precisas. Por exemplo, se os nossos antepassados fizessem uma cerimônia fúnebre de três dias em honra de um chefe morto, deveriam ao menos saber contar até três. Por isso, alguns historiadores acreditam que as preocupações de ordem espiritual, junto ou até antes das necessidades materiais, podem estar na origem da criação dos números. Essa é uma hipótese para explicar a existência das marcas naquele osso de 30000 anos.

1.2 PASTORES, OVELHAS E PEDRINHAS

As primeiras contagens ocorreram em diferentes lugares e épocas, com procedimentos variados. Vejamos, por exemplo, o caso dos pastores de ovelhas. Eles levavam o rebanho para pastar durante o dia. À noite, as ovelhas eram recolhidas em lugar seguro para evitar que outros animais, como lobos, atacassem-nas. Quando o rebanho era grande, ficava difícil saber se algum animal tinha se perdido. Por isso, precisavam ter um controle para verificar se a quantidade de ovelhas soltas pela manhã era a mesma que eram recolhidas.

Podemos imaginar algumas maneiras de resolver o problema do pastor. Por exemplo, pela manhã, ele separava uma pedrinha para cada ovelha que era solta, formando um montinho. À noite, retirava do montinho uma pedrinha para cada ovelha que recolhesse. Assim, o pastor estabelecia uma correspondência entre dois grupos: o das pedrinhas e o rebanho das ovelhas. Se sobrassem pedrinhas, era sinal que alguns animais tinham ficado para trás.

Os historiadores chamam a atenção para o fato de a palavra cálculo originar-se da palavra latina *calculus*, que significa “pedrinha”. Como curiosidade, repare que ainda hoje dizemos que “fulano tem cálculo renal”, quer dizer, ele tem pedrinhas nos rins.

Assim, a palavra calcular, na sua origem, podia significar “contar com pedrinhas”. Esse é um indício de que a contagem pode ter começado com pedrinhas.

Dos montes de pedrinhas foram nascendo os números. Para quantidades pequenas, graças ao senso numérico, os pastores podiam distinguir um monte do outro. Por isso, devem ter começado a dar nomes a esses montes na língua deles. A certo monte davam o nome correspondente a quatro; a outro, o nome correspondente a cinco e assim por diante. Dessa maneira estavam nascendo os números.

1.3 MARCAS, PALAVRAS E DEDOS

Além das pesquisas arqueológicas, há outros trabalhos que nos ajudam a conhecer o passado. Até poucas décadas atrás, por exemplo, existiam grupos humanos totalmente isolados, vivendo da mesma maneira há milhares de anos. Ao estudar como esses grupos contavam, que recursos usavam, que nome davam aos números, os antropólogos ajudam a esclarecer a origem dos números.

No estreito de Torres, entre a Austrália e a Nova Guiné, havia um povo que designava os números assim:

*Urapun ('um'), okosa ('dois'),
Okosa-urapun ('três'), okosa-okosa ('quatro'),...*

Essa maneira de dar nome aos números mostra que aquelas pessoas identificavam o um e o dois e formavam os outros números a partir deles. Essa comunidade criou uma sequência de palavras para expressar as quantidades.

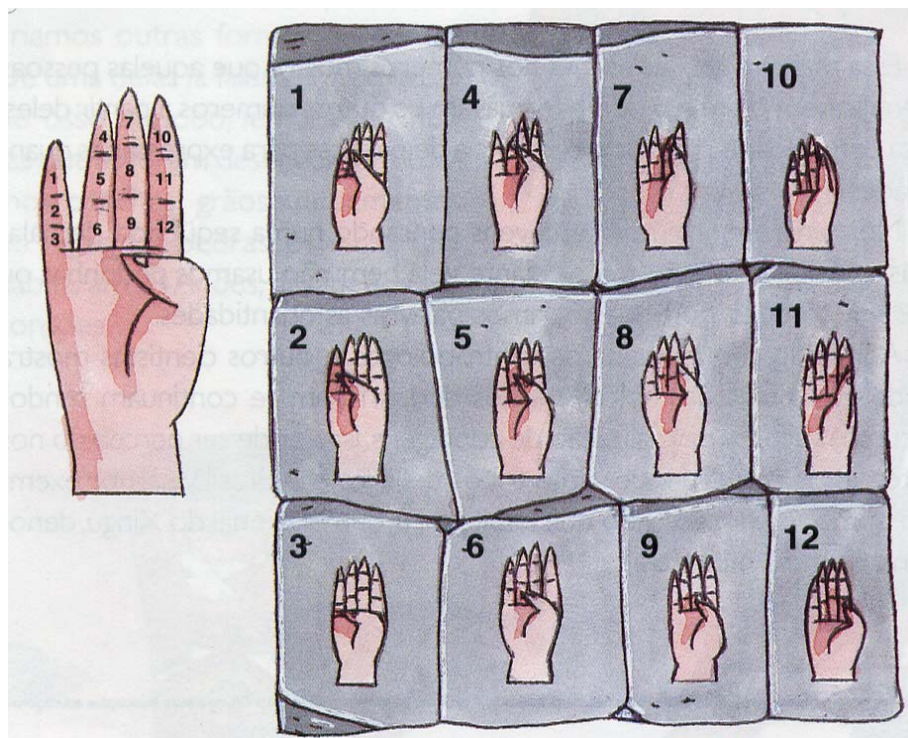
Nós também fazemos contagens pensando numa sequência de palavras: um, dois, três e assim por diante. Veja bem: não usamos pedrinhas ou nós em cordões, porém associamos palavras às quantidades.

A investigação realizada por antropólogos e outros cientistas mostra ainda que, em todas as culturas, os dedos foram (e continuam sendo) recursos valiosos na realização de contagens. Isso pode ser percebido nos sistemas de contagem de várias tribos de índios do Brasil. Veja, por exemplo, como os kuikuro, tribo que habita o parque Nacional do Xingu, denominam alguns números:

Nosso símbolo	Na língua kuikuro	Significado em nossa língua
0	inhalü	não há
5	nhatüi	contei todos os dedos de uma mão
10	timüho	duas mãos
12	takiko itükügü iheke	dois do pé
15	heine utapügü	contei toda mão e um lado do pé
20	tatute utapügü itühügü iheke	toda mão e todo pé
21	aetsi tela inhatügü itühügü iheke	um peguei mão do outro

Também na língua portuguesa encontramos vestígios reveladores da importância dos dedos na contagem. A palavra dígito, que se refere aos símbolos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, vem do latim digitus, que significa ‘dedo’.

Ainda hoje, na Índia, no Egito e em outros países, emprega-se um curioso modo de contar com as mãos. Veja como é:



O polegar aponta, uma a uma, as três falanges de cada um dos outros quatro dedos. Assim, conta-se até doze. Talvez seja essa a origem do costume de contar por dúzias, ainda usado entre nós. E é possível que também tenha a ver com a divisão do dia em 24 horas (dois períodos de 12 horas, isto é, as 12 falanges).

CAPÍTULO II

O PRINCÍPIO DA BASE E O NASCIMENTO DOS SISEMAS DE NUMERAÇÃO

2.1 O NÚMERO E SUAS SIMBOLIZAÇÕES

Diante da distinção sutil que o ser humano aprendeu obter entre o aspecto cardinal e o aspecto ordinal, ele foi conduzido a revisar suas concepções com relação a seus antigos “instrumentos” numéricos (pedras, conchas, pauzinhos, colares de pérolas, gestos relativos às partes do corpo, etc...) tornando-os verdadeiros símbolos numéricos e sendo assim, bem mais cômodos para assimilar, reter, diferenciar e combinar os números.

Um outro progresso foi realizado com a criação dos nomes de números, permitindo desde então uma designação oral bem mais precisa das quantidades e dando possibilidade de conquistar definitivamente o universo dos números abstratos.

Até então as expressões utilizadas eram uma linguagem articulada que foram simplesmente conjuntos modelos que não tinham aparentemente nenhuma relação uns com os outros; os números eram descritos mediante termos instrutivos, freqüentemente em relação direta com a natureza e o mundo ambiente.

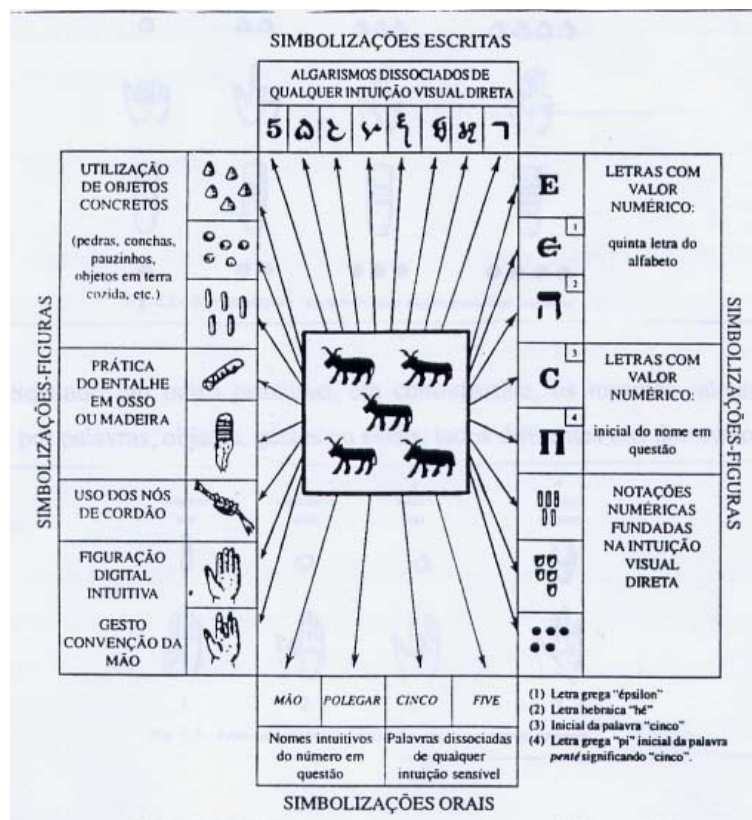
A princípio, na contagem com os dedos eram utilizadas algumas técnicas para cada quantidade de dedos levantados, até quando completasse todos os dedos levantados era considerado a “mão”. Depois, graças a uma transposição anatômica para o vocabulário, por expressões do estilo mínimo, para 1; anular, para 2; médio, para 3; indicador, para 4; polegar, para 5; e assim por diante. No entanto, houve a necessidade de distinguir entre o próprio símbolo do número e o nome do objeto ou da imagem de que se servia o que conduziu o homem a estabelecer uma distinção notável dos símbolos e objetos, até que, finalmente, a verdadeira ligação entre os dois desaparecesse completamente da memória. Entretanto, com o passar do tempo, à medida em

que aprendeu a servir-se de sua linguagem articulada, os sons substituíram pouco a pouco os objetos pelos quais tinham sido criados.

Entretanto, com a idéia da “sucessão natural” incorporada a cada dia no espírito humano, o conjunto heterogêneo dos modelos concretos tomou a forma abstrata de um verdadeiro sistema de nomes do número.

Mas a simbolização concreta e a expressão oral do números não foram as únicas possibilidades exploradas pelo homem ao longo das eras. Houve também, bem mais tarde, a simbolização escrita: a que põe “algarismos” para contribuir, isto é, sinais gráficos de todas as espécies; traços gravados, desenhados ou pintados, marcas em cruz em argila ou em pedra, sinais figurativos, letras do alfabeto, sinais convencionais etc...

Portanto, podemos afirmar que tais criações foram evidentemente muito importantes, porém, provaram que os números não vêm das coisas, mas antes das leis do pensamento humano trabalhando sobre as coisas e sendo assim, não se pode afirmar que já se tem o número em si já que a realidade sugere o número.



2.2 A DESCOBERTA DO PRINCÍPIO DA BASE

O homem dispôs de dois conceitos para simbolizar os números: um, que se qualifica de cardinal que consiste em adotar desde o início um “símbolo-padrão” e o outro que se pode qualificar de ordinal, que consiste em atribuir a cada número um símbolo original e, portanto, em considerar uma sucessão de símbolos que não têm nenhuma relação uns com os outros.

O primeiro princípio definiu que os quatros primeiros números, são representados por uma simples repetição tantas vezes o nome do número 1, ou ainda por alinhamento, justaposição ou superposição de tantas pedras, dedos, entalhes, traços ou círculos que simbolizam a unidade.

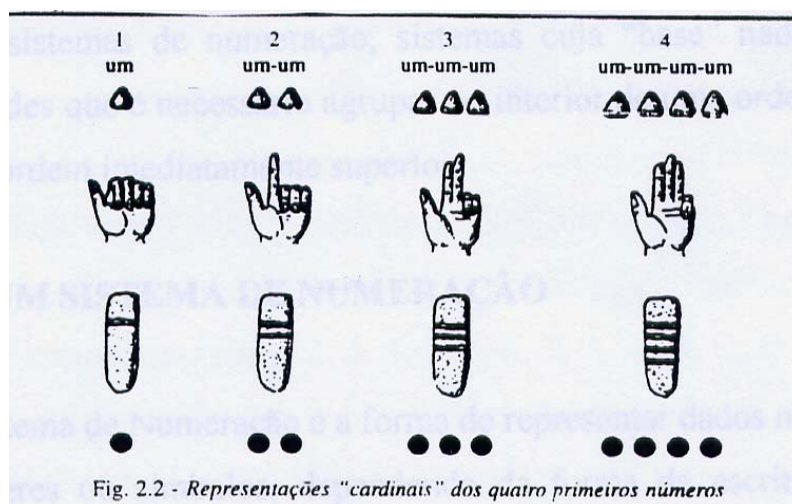


Fig. 2.2 - Representações "cardinais" dos quatro primeiros números

Segundo um outro princípio, em contrapartida, os mesmos números são representados por palavras, objetos, gestos ou sinais, todos diferentes uns dos outros.

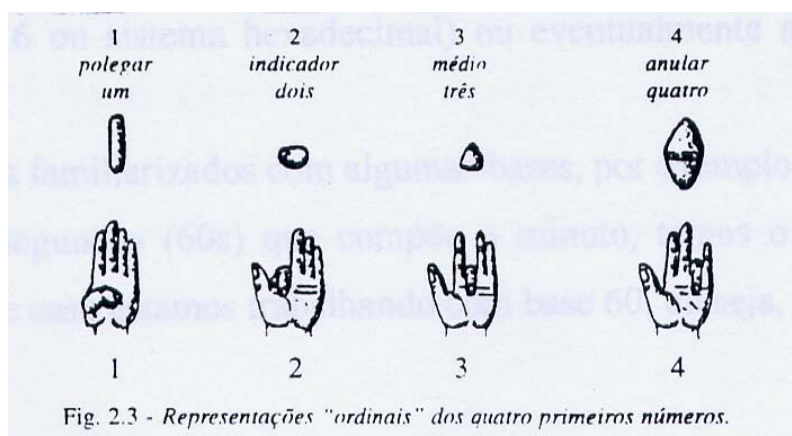


Fig. 2.3 - Representações "ordinais" dos quatro primeiros números.

Entretanto, surgiu a necessidade de representar números cada vez maiores, e evidentemente não se podiam multiplicar indefinidamente pedras, pauzinhos, entalhes ou nós de barbantes, então surgiu um problema insuperável: como designar números elevados com o mínimo possível de símbolos?

Enfim, a solução foi privilegiar em agrupamento particular (como a dezena, a dúzia, a vintena ou a sessentena, por exemplo) e organizar a seqüência regular dos números segundo uma classificação hierarquizada fundada nessa base, dando origem a repartição dos números e seus diversos símbolos segundo estágios sucessivos, aos quais se pode dar os respectivos nomes: unidades de primeira ordem, unidades de segunda ordem, unidades de terceira ordem e assim sucessivamente, chegando a simbolização estruturada dos números. É o que se chama o princípio da base. Sua descoberta marcou o nascimento dos sistemas de numeração, sistemas cuja “base” nada mais é do que o número de unidades que é necessário agrupar no interior de uma ordem dada para formar uma unidade de ordem imediatamente superior.

2.3 BASE DE UM SISTEMA DE NUMERAÇÃO

Sistema de Numeração é a forma de representar dados numéricos através de números, caracteres ou símbolos, dependendo da forma de escrita utilizada. Em um sistema de numeração a base representa a quantidade de algarismos (símbolos) diferentes que esta possui. Os computadores utilizam a base 2 (sistema binário) e os profissionais de hardware e software por facilidade, usam em geral uma base que seja uma potência de 2, tal como 2^4 (base 16 ou sistema hexadecimal) ou eventualmente ainda 2^3 (base 8 ou sistema octal).

Estamos familiarizados com algumas bases, por exemplo:- Ao controlarmos o tempo, temos os segundos (60s) que compõe o minuto, temos o minuto (60m) que compõe a hora - neste caso estamos trabalhando com base 60, ou seja, a cada 60 passamos para uma unidade maior. Ainda neste contexto temos o dia com 24h, neste caso base 24, pois a cada 24h contamos mais um dia.- Outra base que nos é usual é a base 12 quando

utilizamos para a contagem dos meses, a cada 12 meses contamos um ano. Porém, é na base 10 que trabalhamos a nossa matemática (quantidade de itens, valores monetários, idade).

A base 10 como já sabemos contém 10 algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) e quando o valor ultrapassa o maior elemento da base passamos imediatamente para a próxima casa a esquerda. Portanto, o número possui o valor absoluto e também o valor relativo, pois depende da posição que se encontra. Ex.: 745 (setecentos e quarenta e cinco) - O número 7 (sete) neste caso representa setecentos, pois está na posição da centena. O número 4 (quatro) representa o quarenta, pois está na posição da dezena, e o número 5 (cinco) representa cinco pois está na posição da unidade. Esta forma de representação numérica onde o valor é dado pela posição é chamada de Notação Posicional. No nosso dia-a-dia utilizamos a base 10, tanto para a maioria dos cálculos, quanto para uma representação numérica qualquer. No entanto, o computador utiliza apenas dois estados possíveis para representar internamente as informações, ou seja, ele utiliza o bit - binary digit - que representa a base binária, a qual é representada pelos elementos (0, 1). Ainda temos as bases Octal, representada pelos elementos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) e a base Hexadecimal (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F) que são bases intermediárias e também utilizadas para visualização dos valores. Estas duas bases são bastante utilizadas devido a velocidade de conversão dos valores em binários, uma vez que elas são múltiplas entre si. A seguir, estudaremos as relações entre estas bases, como podemos realizar as conversões de uma base para outra, como são realizadas as operações aritméticas básicas nestas bases.

2.3.1 A ORIGEM DA BASE DEZ

Na verdade, a humanidade aprendeu a contar com os seus dez dedos, essa preferência pelos agrupamentos de dez foi comandado por esta acidente da natureza que é a anatomia de nossas mãos. E o problema não é de natureza lingüística.

Tendo como exemplo e para se convencer disso, podemos imaginar um elo que por razões religiosas está temporariamente submetido à interdição da fala: apronta-se para enumerar um rebanho de bisões.

Quando passa o primeiro animal, um primeiro homem, levanta um dedo, depois levanta outro quando passa o segundo animal, e assim sucessivamente, até o décimo bisão.

Nesse momento, um segundo homem, que tem os olhos fixados constantemente nas mãos do primeiro, levanta seu primeiro dedo, enquanto o seu colega baixa os seus, temos então a primeira dezena recenseada. Quando passa o décimo primeiro animal, o primeiro homem, o das unidades levanta de novo seu primeiro dedo. No décimo segundo levanta o outro dedo e assim sucessivamente até o vigésimo animal.

Depois do vigésimo animal o segundo homem levanta o segundo dedo, enquanto o outro baixa todos os seus dedos e assim era determinada a contagem através dos dedos e para cada homem dava-se a sua função de unidade, dezena, centena, etc...

2.3.2 A ORIGEM DAS OUTRAS BASES

A razão de adoção da base 20 por certas culturas nos é fornecido pela idéia concernente a numeração asteca. Assim, é determinado os cinco primeiros números que são associados aos cinco dedos de uma mão.

As cinco seguintes, a outra mão, as cinco outras, são associados aos dedos de um pé e as cinco últimas aos outros cinco dedos do outro pé. De modo que no último dedo seja formado a vintena.

Um outro fato notável, é que os esquimós da Groenlândia empregam, para o número 53 uma expressão da seguinte maneira: “do homem terceiro, três no primeiro pé” o que significa 2 homens com 20 dedos cada um mais 2 mãos do terceiro mais 3 dedos do primeiro pé.

Segundo C. Zaslowsky, os banda da África Central exprimem ainda o número 20 dizendo algo como “dobrar um homem”, entendendo-se por isso que quando

um indivíduo flexiona as pernas, a contagem dos dedos dos pés e das mãos salta imediatamente aos olhos do observador.

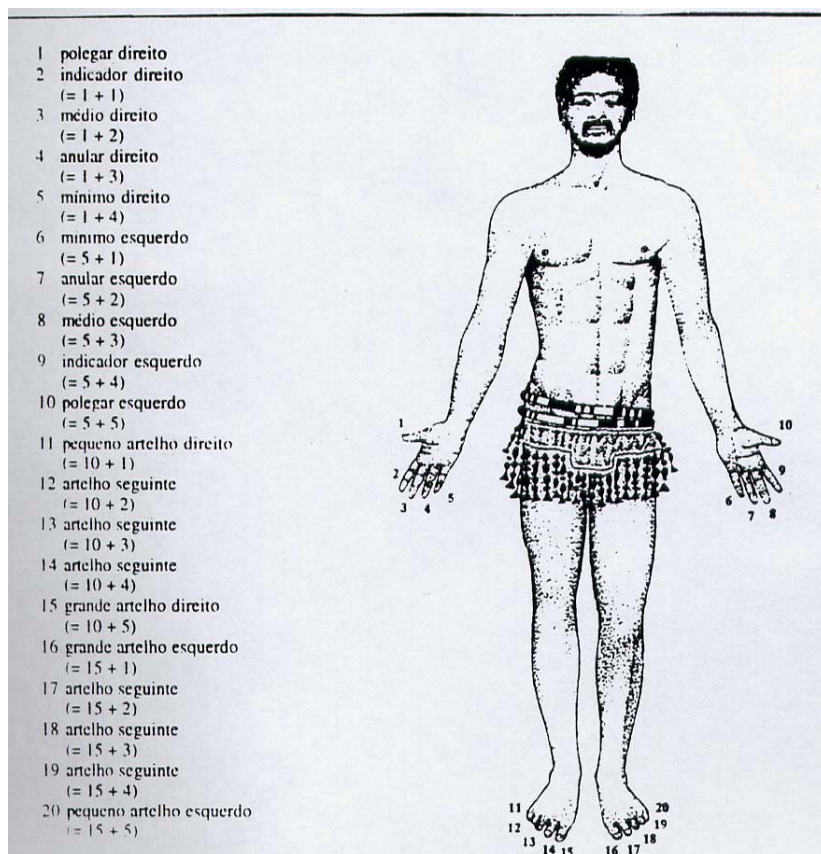
Em certos dialetos maias, a expressão *hun uinic*, que quer dizer 20, significa também, “um homem”.

Os malenkê do Senegal exprimem os números 20 e 40 como “um homem completo” e “uma colcha” que significa um casal esticado sobre uma mesma colcha.

Não há dúvida de que o emprego do sistema vigesimal terá sua origem do hábito de contagem com os dedos das mãos e dos pés.

A origem da base cinco é igualmente antropomórfica; essa maneira de contar encontrou sua razão de ser em muitos casos para pessoas que aprenderam a contar com uma mão só.

E que pode também ser usado da seguinte maneira; a mão esquerda é para contar as unidades e a direita os múltiplos de cinco, ou seja, a cada dedo levantado da mão esquerda vale uma unidade e a cada dedo levantado da mão direita vale cinco unidades.



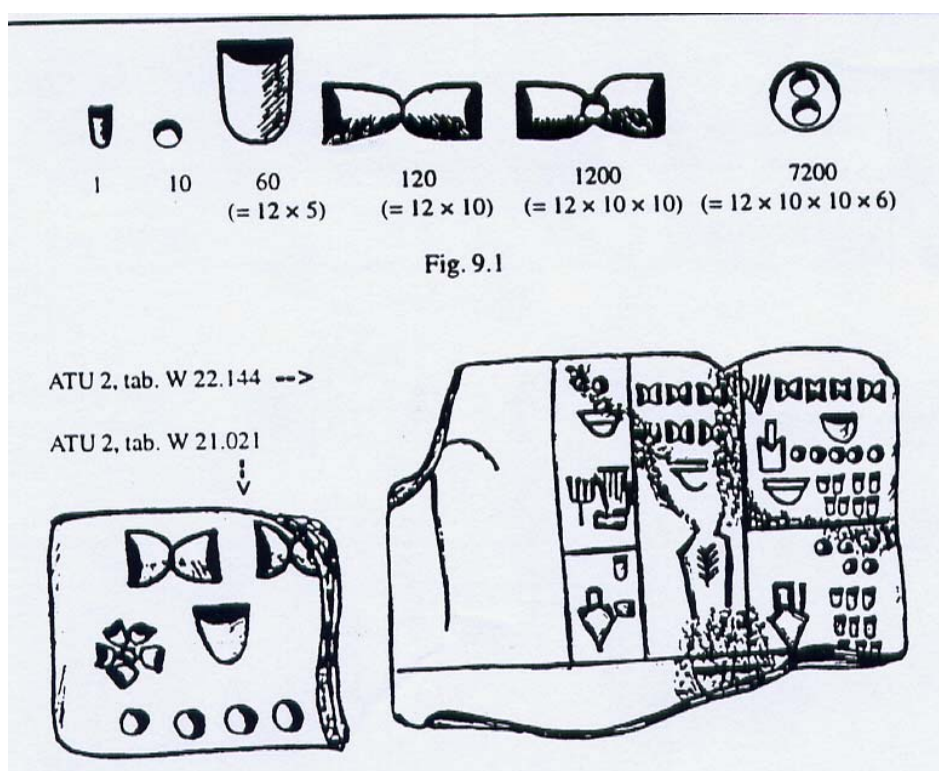
2.3.3 A BASE DOZE

A base 6 não foi atestada enquanto elemento gerador de um sistema, mas a contagem duodecimal, por sua vez, foi muito bem.

Nossa cultura manteve-a para a contagem de ovos e de ostras, por exemplo, e possui como suas testemunhas a dúzia e a grossa (doze dúzias)

Sabe-se além disso que os mesopotâmios subdividiam o dia em 12 partes iguais, bem como a eclíptica e o zodíaco, uma divisão em 12 setores de 30 graus cada um.

Nas tabuletas arcaicas descobertas em Uruk (publicados por Green e Nisser, depois decifradas por Damerov e Englund), constatou-se a existência de várias notações numéricas, portanto o sistema clássico (conforme mostra a figura abaixo) entre as quais se observará a seguinte, utilizadas para exprimir medidas de comprimento.



2.3.4 A ORIGEM PROVÁVEL DO SISTEMA SEXAGESIMAL

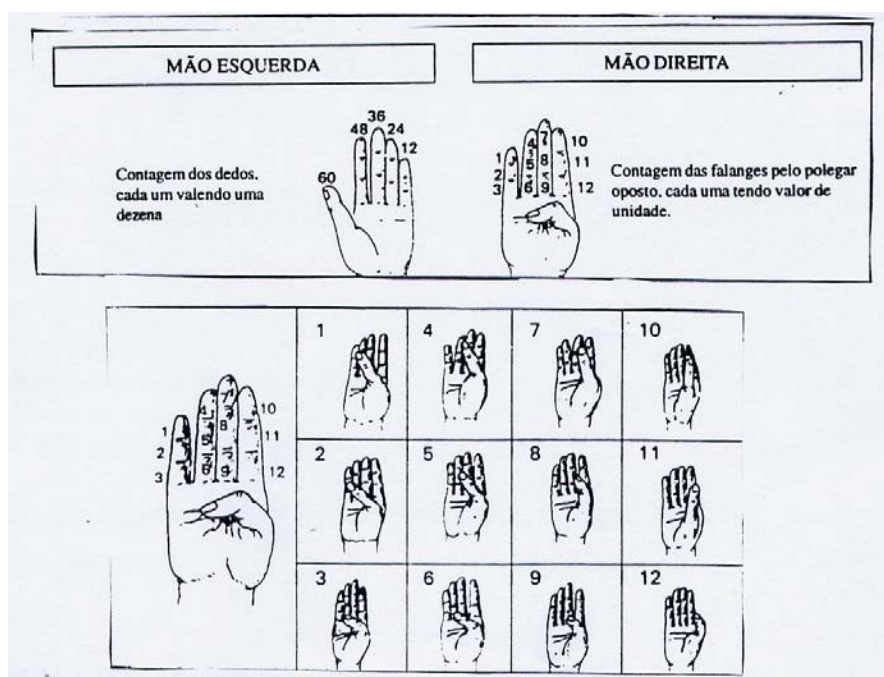
A origem da base sessenta provavelmente vem da combinação das bases 5 e 12 que é inteiramente plausível.

Essa hipótese supõe inicialmente a existência de uma e mesmo de várias populações indígenas bem antes da dominação Suméria na Baixa Mesopotâmia, que tinham sistemas de contagem diferentes, ambos distintos do sistema sexagesimal, um repousando na base cinco e o outro na base doze.

Mesmo não tendo muito conhecimento dessa população indígena, embora ignore tudo (ou quase) dos laços culturais anteriores dos sumérios (estes, parece, romperam todas as pontes com seu hábitat de origem), pode-se legitimamente supor que essas duas culturas, antes de constituir a simbiose que se sabe, influenciaram na origem do sistema sexagesimal.

A origem da base 60 poderia portanto ter sido, ligado ao sistema de contagem manual, ainda utilizado em nossos dias no Oriente Próximo e na península indo-chinesa.

Graças a essa técnica digital, com efeito, a base sessenta apareceria certamente como uma base principal e os números 12 e 5 como bases auxiliares.



2.4 SISTEMA DE NUMERAÇÃO: DECIMAL, BINÁRIO, OCTAL E HEXADECIMAL.

Sistema Numérico Decimal

- Base: 10

- Dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

- A contribuição de um dígito num número decimal, depende da posição que ele ocupa.

Exemplo 1:

→	Dígito das Centenas (10^2)
→	Dígito das Dezenas (10^1)
→	Dígito das Unidades (10^0)

3 7 3 = $3 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 3 \times 10^0$

Exemplo 2:

→	Dígito das Milhares (10^3)
→	Dígito das Centenas (10^2)
→	Dígito das Dezenas (10^1)
→	Dígito das Unidades (10^0)

4 058 = $4 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 8 \times 10^0$

Exemplo 3:

0,3	2	5	=	3×10^{-1}	+	2×10^{-2}	+	5×10^{-3}
↙	↓	↘						
10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}						

Propriedades de um número decimal:

1. São usados os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
2. Os dígitos em um número inteiro do sistema decimal são coeficientes de potências da base

10 cujos expoentes, começando por 0, crescem de 1 em 1, da direita para a esquerda.

3. Os dígitos da parte fracionária (direita da vírgula) de um número do sistema decimal são

coeficientes de potências de base 10 cujos expoentes começando de -1, decrescem de -1 em

-1, da esquerda para a direita.

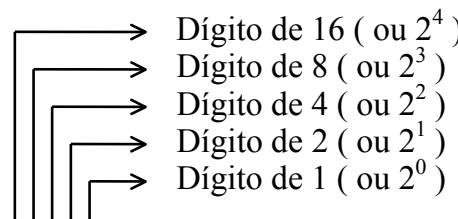
Sistema Numérico Binário

- Base: 2

- Dígitos: 0 e 1

- A contribuição de um dígito num número binário depende da posição que ele ocupa.

Exemplo 1: Considere o número binário 10010



Dígito de 16 (ou 2^4)
Dígito de 8 (ou 2^3)
Dígito de 4 (ou 2^2)
Dígito de 2 (ou 2^1)
Dígito de 1 (ou 2^0)

$$1\ 0010_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$
$$= 0 + 2 + 0 + 0 + 16 = 18_{10}$$

O sistema numérico binário, difere em vários aspectos do sistema decimal que é o que nós utilizamos na vida diária. Este sistema numérico é de base igual a 2 e só contém dois algarismos, que são '1' e '0'. O sistema numérico binário, é o usado nos computadores e nos microcontroladores, porque é, de longe, muito mais adequado ao processamento por parte destes dispositivos, que o sistema decimal. Utilizando o sistema binário de numeração, podemos representar informação com apenas dois valores. Os valores 0 e 1 são utilizados para representar situações lógicas. O estado lógico 0 e o estado lógico 1 são utilizados no estudo de sistemas físicos que assumem dois estados de

funcionamento. Se 0 representa uma determinada situação, então 1 representa a situação complementar, por exemplo:

<i>Aberto</i>	<i>Fechado</i>
<i>Sem tensão</i>	<i>Com tensão</i>
<i>Desligado</i>	<i>Ligado</i>

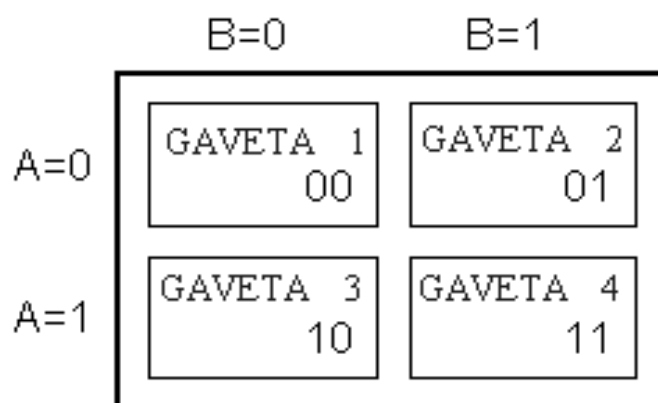
Normalmente, os números binários que iremos usar, contêm 8, 16, ou 32, dígitos binários, não sendo importante, no âmbito deste livro, discutir as razões. De momento, basta-nos aceitar que isto é assim.

Exemplo:

10011011 é um número binário com 8 dígitos

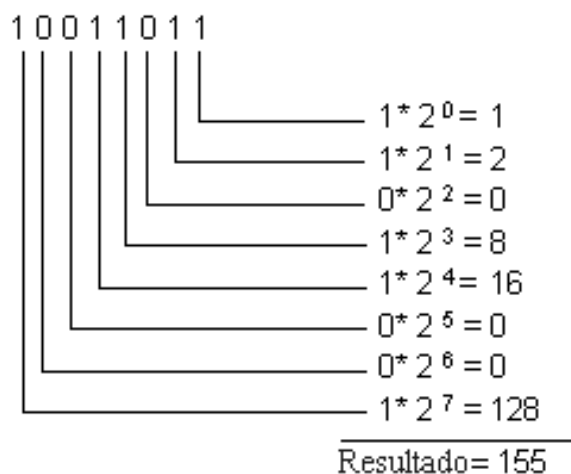
De modo a perceber a lógica dos números binários, vamos considerar um exemplo. Vamos imaginar uma pequena estante com quatro gavetas e, que precisamos de dizer a alguém, para nos trazer qualquer coisa que esteja numa dessas gavetas. Nada mais simples, iremos dizer, (gaveta) em baixo, do lado esquerdo e, a gaveta que pretendemos, fica claramente definida. Contudo, se quisermos dar a indicação sem usarmos instruções tais como esquerda, direita, por baixo, por cima, etc. , nesse caso temos um problema a resolver. Existem muitas soluções para isto, mas vamos escolher uma que seja prática e nos ajude! Vamos designar as linhas por A e as colunas por B. Se A=1, estamos a referir-nos às gavetas de cima e se A=0, estamos a escolher as gavetas em baixo (na linha de baixo). Do mesmo modo, se B=1 estamos a referir-nos às gavetas da esquerda (coluna da esquerda) e se B=0 às gavetas da direita (ver figura seguinte). Agora, só precisamos escolher uma das quatro combinações possíveis: 00, 01, 10, 11. Este processo de designar individualmente cada gaveta, não é mais que uma representação numérica binária ou a conversão dos números decimais a que estamos habituados para a forma binária. Por

outras palavras, referências tais como “primeiro, segundo, terceiro e quarto” são substituídas por “00, 01, 10 e 11”.



Aquilo que falta para nos familiarizarmos com a lógica que é usada no sistema numérico binário, é saber extrair um valor numérico decimal de uma série de zeros e uns e, claro, de uma maneira que nós possamos entender. Este procedimento é designado por conversão binário-decimal.

Exemplo:



Como se pode ver, a conversão de um número binário para um número decimal é feita, calculando a expressão do lado esquerdo. Consoante a sua posição no número, assim cada algarismo binário traz associado um determinado valor (peso), pelo

qual ele vai ser multiplicado, finalmente, adicionando os resultados de todas estas multiplicações, obtemos o tal número decimal que nós já somos capazes de entender. Continuando, vamos agora supor que dentro de cada gaveta existem berlindes (tabuleiro pequeno de quatro rodas e suspenso entre dois varais; nome de um jogo de prendas): 2 berlindes na primeira gaveta, 4 na segunda gaveta, 7 na terceira e 3 na quarta gaveta. Vamos agora dizer à pessoa que vai abrir as gavetas para usar a representação binária na resposta.

Nestas circunstâncias, a pergunta pode ser esta: “Quantos berlindes há na gaveta 01?” e, a resposta, deve ser: “Na gaveta 01 existem 100 berlindes”. Deve notar-se que tanto a pergunta como a resposta são muito precisas, apesar de não estarmos a utilizar a linguagem normal. Deve notar-se também, que, para representarmos todos os números decimais de 0 a 3, apenas precisamos de dois símbolos binários e que, se quisermos números superiores a estes, temos que ir acrescentando mais dígitos binários. Para podermos representar todos os berlindes que estão em qualquer das gavetas, precisamos de 3 algarismo binários.

Ou seja, para representarmos os decimais de 0 a 7, bastam-nos três símbolos binários, de 0 a 15, quatro, etc. Generalizando, o maior valor decimal, que pode ser representado por intermédio por um determinado número de símbolos binários, coincide com 2 elevado a um expoente igual ao número de símbolos binários utilizados, subtraído de uma unidade.

Exemplo:

$$2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$$

Isto significa que é possível representar os números decimais de 0 a 15, apenas com 4 algarismos binários (incluem-se portanto os números '0' e '15'), ou seja, 16 valores diferentes.

Sistema Numérico Octal

O sistema de números octais tem a base igual a 8, o que indica o uso de oito algarismos, sendo todos equivalentes aos do sistema decimal. Os algarismos usados neste sistema, são:

- Base: 8

- Dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7

No sistema octal (base 8), três bits (dígito binário) são representados por apenas um algarismo octal (de 0 a 7).

Sistema Numérico Hexadecimal

O sistema de números hexadecimal usa a base 16, o que indica o uso de dezesseis símbolos, sendo os mesmos símbolos usados no sistema decimal mais as seis primeiras letras do alfabeto. Os algarismos utilizados no sistema hexadecimal são:

- Base: 16

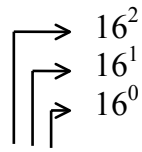
- Dígitos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E e F

- A contribuição de um dígito num número hexadecimal depende da posição que ele ocupa.

- As seis primeiras letras do alfabeto, utilizadas no sistema hexadecimal como números representam as seguintes quantidades:

$$A = 10 \quad B = 11 \quad C = 12 \quad D = 13 \quad E = 14 \quad F = 15$$

Exemplo: Considere $1A3_{16}$ (ou $1A3H$ como notação optativa)



$$\begin{aligned} 1A3 &= 3 \times 16^0 + 10 \times 16^1 + 1 \times 16^2 \\ &= 3 + 160 + 256 = 419 \end{aligned}$$

Obs.: Cada dígito hexadecimal pode ser representado por 4 dígitos binários.

O sistema de números hexadecimais é muito usado em projetos de hardware e software, já que estes representam grupos de dígitos binários, facilitando a representação de códigos binários. É usual representar quantidades usando sistemas em potências do binário, para reduzir o número de algarismos da representação.

A seguir, apresentamos uma tabela com os números em decimal e sua representação correspondente em binário, octal e hexadecimal:

Base 10	Base 2	Base 8	Base 16
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Nota: a base 16 ou sistema hexadecimal pode ser indicada também por um "H" ou "h" após o número; por exemplo: FFH significa que o número FF (ou 255 em decimal) está em hexadecimal. Não confundir o "H" ou "h" com mais um dígito, mesmo porque em hexadecimal só temos algarismos até "F" e portanto não existe um algarismo "H".

CAPÍTULO III

INTRODUÇÃO E CONVERSÃO ENTRE

BASES NUMÉRICAS

3.1 CONVERSÕES ENTRE AS BASES 2, 8 E 16

As conversões mais simples são as que envolvem bases que são potências entre si. Vamos exemplificar com a conversão entre a base 2 e a base 8.

3.1.1 CONVERSÃO BINÁRIO-OCTAL (BASE 2 E 8)

Existe uma relação de multiplicidade entre as bases binária e octal. A base binária com 2 elementos e a base octal com 8 elementos. A relação é de $2^3=8$, portanto podemos compreender que o número na base binária tem que estar separado em grupos de três elementos (bits) para representar todos os elementos da base octal, conforme pode ser visto na tabela abaixo. Dada esta relação, podemos realizar facilmente a conversão apenas considerando que para cada elemento da base octal são necessários três elementos da base binária. A recíproca também é verdadeira, para cada três elementos da base binária temos o elemento correspondente na base octal.

Como $2^3 = 8$, separando os bits de um número binário em grupos de três bits (começando sempre da direita para a esquerda) e convertendo cada grupo de três bits para seu equivalente em octal, teremos a representação do número em octal.

Exemplo:

$10101001_2 = (x)_8$ separando em grupos de 3 bits,

$10101001_2 =$	010	101	001
----------------	-----	-----	-----

Sabemos que $010_2 = 2_8$; $101_2 = 5_8$; $001_2 = 1_8$ e portanto, $10101001_2 = 251_8$

3.1.2 CONVERSÃO OCTAL-BINÁRIO (BASE 8 E 2)

A conversão inversa se faz convertendo cada dígito octal por um grupo de três dígitos binários.

Exemplo:

$1765_8 = (x)_2$

1	7	6	5
001	111	110	101

Portanto, $1765_8 = 001111110101_2$

3.1.3 CONVERSÃO BINÁRIO-HEXADECIMAL (BASE 2 E 16)

Assim como a base octal, a base hexadecimal também é múltipla da base binária pois $2^4=16$, portanto a conversão entre estas bases é feita da mesma forma que a base binária e octal, porém são considerados 4 elementos. Para a conversão de um número binário para hexadecimal divide-se da direita para a esquerda em grupos de 4 e busca-se o correspondente em hexadecimal na tabela. Para converter um número hexadecimal em binário, busca-se na tabela o correspondente sempre com 4 elementos binários.

Como $2^4 = 16$, basta separarmos em grupos de 4 bits (começando sempre da direita para a esquerda) e converter cada grupo para seu equivalente em hexadecimal.

Exemplo:

$11010101101_2 = (x)_{16}$ separando em grupos de 4 bits

$11010101101_2 =$	0110	1010	1101
-------------------	------	------	------

Cada grupo de 4 bits é então substituído pelo equivalente hexadecimal, então: $110_2 = 6_{16}$; $1010_2 = A_{16}$; $1101_2 = D_{16}$

Portanto, $11010101101_2 = 6AD_{16}$

No caso da conversão de hexadecimal para binário observe que cada elemento hexadecimal é representado por um conjunto de 4 elementos em binários, observe que os zeros a esquerda devem permanecer.

3.1.4 CONVERSÃO HEXADECIMAL-BINÁRIO (BASE 16 E 2)

A conversão inversa se faz convertendo cada dígito hexadecimal por grupos de dígitos de quatro dígitos binários.

Exemplo:

$3F5_{16} = (x)_2$

3	F	5
0011	1111	0101

Portanto, $3F5_{16} = 1111110101_2$

3.3 CONVERSÃO DE NÚMEROS EM UMA BASE b QUALQUER P/ UMA BASE 10

Para se determinar o equivalente decimal de um número escrito numa base b usamos a expressão abaixo, tendo assim, uma melhor forma de fazer a conversão:

$$N_b = a_n.b^n + \dots + a_2.b^2 + a_1.b^1 + a_0.b^0 + a_{-1}.b^{-1} + a_{-2}.b^{-2} + \dots + a_{-n}.b^{-n}$$

Exemplos:

$$101101_2 = 45_{10}$$

$$101101_2 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 45_{10}$$

$$4F5_{16} = 1269_{10}$$

$$4 \times 16^2 + 15 \times 16^1 + 5 \times 16^0 = 1269_{10}$$

3.4 CONVERSÃO DE NÚMEROS EM UMA BASE 10 P/ UMA BASE b QUALQUER

Neste caso faz-se a divisão do número decimal pela base desejada, o resto encontrado (deve ser sempre menor que a base) é o algarismo menos significativo do valor na base B (mais a direita). Em seguida, divide-se o quociente encontrado pela base B; o resto é o algarismo seguinte (a esquerda) e assim sucessivamente.

Exemplo:

$$a) (3964)_{10} = (7574)_8$$

$$\begin{array}{r}
 3964 \overline{) 8} \\
 \underline{32} \\
 76 \\
 \underline{72} \\
 44 \\
 \underline{40} \\
 4
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 495 \overline{) 8} \\
 \underline{48} \\
 15 \\
 \underline{8} \\
 7
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 61 \overline{) 8} \\
 \underline{56} \\
 5
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 7 \overline{) 8} \\
 \underline{0}
 \end{array}$$

Resposta: $(7574)_8$

Para compreendermos melhor como funciona a divisão, iremos falar sobre o ALGORITMO DA DIVISÃO:

“ Sejam a e b números inteiros. Diz-se que b divide a (ou que b é um divisor de a ou, ainda, que a é um múltiplo de b) se existe um inteiro c tal que $bc = a$. ”

Usaremos a notação b/a para indicar que b divide a . A negação dessa afirmação será indicada por $b \nmid a$.

Convém observar que, se $b \neq 0$, o inteiro c nas condições da definição é único. De fato, se existisse outro c' tal que $bc' = a$, teríamos que $bc = bc'$ e, cancelando, vem que $c = c'$. O inteiro assim definido chama-se quociente de a por b e é indicado por

$$c = a/b$$

Por outro lado, note que $0/a$ se e somente $a = 0$. Nesse caso, o quociente não é único pois $0 \cdot c = 0$, para todo inteiro c . Por causa disso, costuma-se excluir o caso em que o divisor é nulo, e nós vamos aderir a essa convenção: *em tudo o que segue, mesmo*

que não seja explicitamente dito, estaremos admitindo que todos os divisores considerados são diferentes de zero.

Seja $b \geq 2$ um inteiro. Todo inteiro positivo a pode ser escrito de modo único na forma

$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \dots + r_1 b + r_0$ em que $n \geq 0$, $r_n \neq 0$ e, para cada índice i , $0 \leq i \leq n$, tem-se que

$0 \leq r_i < b$. De fato:

Dividindo a por b , obtemos números q_0, r_0 , tais que

$$a = bq_0 + r_0, 0 \leq r_0 < b.$$

Dividindo q_0 por b , obtemos q_1, r_1 tais que

$$q_0 = bq_1 + r_1, 0 \leq r_1 < b.$$

Esse processo pode ser repetido; porém, como cada quociente obtido é não negativo e necessariamente menor que o anterior, em algum passo deveremos obter um quociente nulo. Suponhamos que o primeiro quociente nulo seja o n -ésimo.

$$a = bq_0 + r_0, \quad 0 \leq r_0 < b.$$

$$q_0 = bq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b.$$

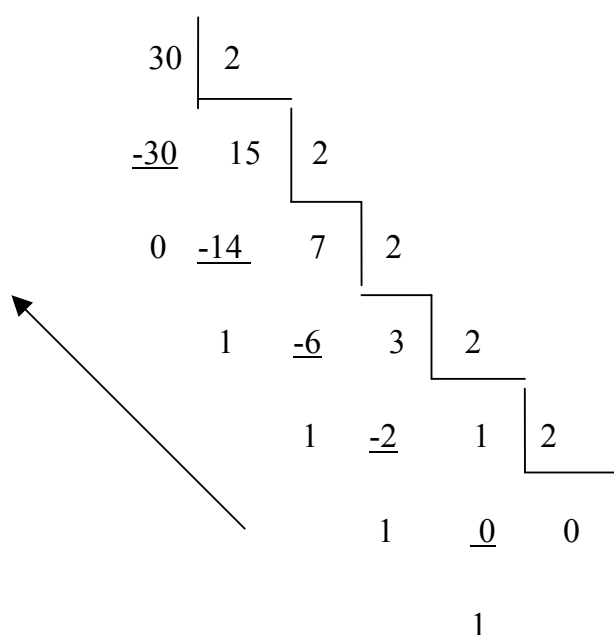
$$q_1 = bq_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < b.$$

$$q_{n-2} = bq_{n-1} + r_{n-1}, \quad 0 \leq r_{n-1} < b.$$

$$q_{n-1} = b \cdot 0 + r_n, \quad 0 \leq r_n < b.$$

3.4.1 PARTE INTEIRA

O número decimal deverá ser dividido sucessivas vezes pela base, sendo que o resto de cada divisão será igual a um algarismo do novo número. O exemplo mostra a conversão do número 30_{10} para a base 2:



sentido de leitura do número – portanto, $(30)_{10} = (11110)_2$

3.4.2 PARTE FRACIONÁRIA

O processo para a parte fracionária consiste de uma série de multiplicações sucessivas do número fracionário a ser convertido pela base.

A parte inteira do resultado da primeira multiplicação será o valor da primeira casa fracionária e a parte fracionária será de novo multiplicada pela base e assim por diante, até o resultado ser igual a zero ou até encontrarmos o número de casas decimais desejado. Por exemplo, vamos converter $0,65_{10}$ para a base 2, com 5 e com 10 algarismos fracionários:

Aproximação com 5 dígitos	Aproximação com 10 dígitos
$0,65 \times 2 = 1,3$	$0,8 \times 2 = 1,6$
$0,3 \times 2 = 0,6$	$0,6 \times 2 = 1,2$
$0,6 \times 2 = 1,2$	$0,2 \times 2 = 0,4$

$0,2 \times 2 = 0,4$	$0,4 \times 2 = 0,8$
$0,4 \times 2 = 0,8$	$0,8 \times 2 = 1,6$
Número equivalente	Número equivalente
$0,65 = 0,10100$	$0,65 = 0,1010011001$

De outra forma podemos calcular da seguinte maneira:

Iremos converter $0,423_{10}$ na base 10 para base 3 com 5 casas decimais;

$$0,423_{10} = 4/10^1 + 2/10^2 + 3/10^3 = a/3^1 + b/3^2 + c/3^3 + d/3^4 + e/3^5$$

Neste caso não sabemos quais são os valores correspondentes a (a, b, c, d, e), mas sabemos que poderão valer somente (0,1,2) que são os dígitos da base 3.

Agora iremos calcular o mmc entre ambos os lados,

$$(400 + 20 + 3)/1000 = (3^4a + 3^3b + 3^2c + 3^1d + e)/3^5$$

$$423/1000 = (3^4a + 3^3b + 3^2c + 3^1d + e)/3^5$$

Agora iremos encontrar um valor para (a, b, c, d e e) no qual dê um valor aproximado entre os lados conforme abaixo;

$$423 \times 3^5 \approx 81.000a + 27.000b + 9.000c + 3000d + 1.000e$$

$$102789 \approx 81.000 \times 1 + 27.000 \times 0 + 9.000 \times 2 + 3.000 \times 1 + 1.000 \times 1$$

$$102789 \approx 103000.$$

3.5 CONVERSÃO DE NÚMEROS ENTRE DUAS BASES QUAISQUER

Para converter números de uma base b para uma outra base bx qualquer, o processo prático utilizado é converter da base b dada para a base 10 e depois da base 10 para a base bx pedida.

CAPÍTULO IV

ARITMÉTICA DECIMAL E BINÁRIA

O sistema numérico dá a possibilidade de executar duas operações básicas: adição e subtração. Porém, partindo de tais operações básicas é possível realizar outras operações como: multiplicação, divisão. A aritmética binária (adição, subtração, multiplicação e divisão) será executada tendo a aritmética decimal como guia.

4.1 ADIÇÃO

4.1.1 DECIMAL/BINÁRIA

Para efetuar uma adição decimal, alinhamos os dígitos dos dois números que devem ser adicionados. Por exemplo, $235 + 46 = 281$:

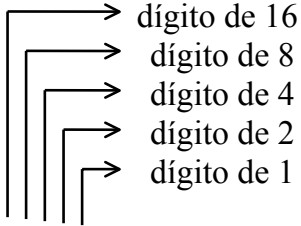
$$\begin{array}{r} \begin{array}{l} \rightarrow \text{dígito das centenas} \\ \rightarrow \text{dígito das dezenas} \\ \rightarrow \text{dígito das unidades} \end{array} \\ 235 \\ + 46 \\ \hline 281 \end{array}$$

Somando a primeira coluna, números 5 e 6, resulta o dígito 1 com um transporte de 1. O transporte é então somado à próxima coluna. Somando a segunda coluna, $(1 + 3 + 4)$, resulta o número 8, sem transporte. Este processo continua até que todas as colunas (incluindo os transportes) tenham sido somadas. A soma representa o valor numérico das parcelas.

$$\begin{array}{r} 1 \times 10^1 \\ 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0 \\ 4 \times 10^1 + 6 \times 10^0 \\ \hline 2 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 1 \times 10^0 = 281 \end{array}$$

Logo, podemos concluir que é necessário que as casas decimais estejam de acordo com suas posições ou seja, quando dizemos que subiu um número, estamos dizendo na verdade é o transporte deste número para sua casa decimal correta. Como o exemplo acima, o número que subiu se encontra em sua real casa decimal.

Fazemos essencialmente a mesma coisa para a adição entre binários. Por exemplo, somemos 10011_2 a 1001_2



$$\begin{array}{r}
 10011 \\
 + 1001 \\
 \hline
 11100
 \end{array}$$

Na primeira coluna, $1 + 1$ resulta 0 com um transporte de 1 para a segunda coluna. Isto concorda com a regra 4. Na segunda coluna, $1 + 0$ resulta em 1 somando o transporte da primeira coluna irá resultar em 0 com transporte. Na terceira coluna, $0 + 0$ resulta em 0. Somando este resultado ao transporte da segunda coluna irá resultar em 1. Na quarta coluna $0 + 1$ resulta em 1 sem transporte. Na quinta coluna pode se dizer que $1 + 0$ e também irá resultar em 1 sem transporte.

Assim temos,

$$10011 + 1001 = 11100$$

$$\begin{array}{r}
 1x2^2 + 1x2^1 \\
 1x2^4 + 0x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0 \\
 1x2^3 + 0x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0 \\
 \hline
 1x2^4 + 1x2^3 + 1x2^2 + 0x2^1 + 0x2^0 = 11100_2
 \end{array}$$

Adicionamos então, dois dígitos de mesma posição de cada vez, começando pelos dígitos de mais baixa ordem. Ao adicionarmos dois dígitos binários, existem quatro possibilidades:

$$\begin{array}{cccc}
 & & & 1 \leftarrow \text{vai-um} \\
 1) & 0 & 2) & 0 & 3) & 1 & 4) & 1 \\
 & +0 & & +1 & & +0 & & +1 \\
 & \underline{0} & & \underline{1} & & \underline{1} & & \underline{1} \ 0
 \end{array}$$

Ainda se define:

$$\begin{array}{r}
 1 \leftarrow \text{vai-um} \\
 1 \\
 1 \\
 +1 \\
 \hline
 1 \ 1
 \end{array}$$

Então :

$$\begin{array}{r}
 10011 \\
 + 1001 \\
 \hline
 11100
 \end{array}$$

Exemplo 1: $2_{10} + 2_{10} = 4_{10}$ - iremos agora converter as parcelas da soma que estão na base 10 para base 2 conforme abaixo,

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 2} \\
 \underline{2} \\
 0
 \end{array}$$

Logo, teremos que $2_{10} = 10_2$

Agora iremos somar as parcelas (2_{10}) convertidos na base 2 = (10_2),

$$\begin{array}{r}
 10_2 \\
 + 10_2 \\
 \hline
 100_2
 \end{array}$$

Exemplo 2: $7_{10} + 5_{10} = 12_{10}$ - iremos converter as parcelas para base 2 e fazer a soma em binário (somar as parcelas convertidas para base 2)

$$\begin{array}{r}
 7 \overline{) 2} \\
 \underline{6} \overline{) 2} \\
 \underline{1} \overline{) 1} \\
 \underline{2} \\
 \underline{1}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 5 \overline{) 2} \\
 \underline{4} \overline{) 2} \\
 \underline{2} \overline{) 1} \\
 \underline{2} \\
 \underline{0}
 \end{array}$$

Agora iremos fazer a soma das parcelas convertidas para base 2;

$$\begin{array}{r} 111_2 \\ + 101_2 \\ \hline 1100_2 \end{array}$$

4.2 SUBTRAÇÃO

4.2.1 DECIMAL / BINÁRIA

Iremos revisar a subtração binária partindo da subtração decimal, pois a mesma, é realizada exatamente como subtração decimal.

Regras:

- 1) $0 - 0 = 0$
- 2) $0 - 1 = 1$ (empresta 1)
- 3) $1 - 0 = 1$
- 4) $1 - 1 = 0$

$205 - 121 = 84$	Empréstimo	$1 \times 10^2 + 10 \times 10^1$
	Minuendo	$2 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 5 \times 10^0$
	Subtraendo	<u>$1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0$</u>
		$0 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 4 \times 10^0 = \mathbf{84}_{10}$

No sistema decimal, o dígito emprestado tem o valor de 10. Portanto, o dígito do minuendo agora tem o valor 10, e 2 de 10 resulta 8. Na terceira coluna, 1 de 1 resulta em 0. Seja o subtraendo maior que o minuendo na coluna seguinte, é necessário

que transporte 1 do próximo dígito de ordem superior para a coluna que está subtraindo. Na terceira coluna, o minuendo foi reduzido de 2 para 1 devido ao empréstimo prévio, e 1 de 1 resulta 0. Toda vez que 1 é emprestado de um dígito de ordem superior, o empréstimo é igual, em valor, à base do sistema numérico. Portanto, um empréstimo no sistema numérico decimal é igual a 10, enquanto um empréstimo no sistema numérico binário é igual a 2.

Quando se subtrai um número binário de outro, você usa o mesmo método descrito para subtração decimal.

Exemplo 1: $4 - 2 = 2$

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 2} \\ \underline{2} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \overline{) 2} \\ \underline{2} \\ 0 \end{array}$$

$$100 - 10 = 10$$

Empréstimo		2×2^1
Minuendo	1×2^2	$+ 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$
Subtraendo		$\underline{-1 \times 2^1 + 0 \times 2^0}$
Diferença		$1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 10_2$

A linha “empréstimo” nos mostra o valor de cada dígito do minuendo depois da ocorrência de cada transporte. Lembre-se que o binário 10 é igual ao decimal 2.

Na primeira coluna, 0 de 0 resulta 0 (regra 1). Então, 1 de 0 necessita de um empréstimo da terceira coluna. Assim, 1 de 2 resulta 1 (regra 2).

O minuendo na terceira coluna agora é 0, devido ao empréstimo e o subtraendo é 0 (não existe), de modo que 0 de 0 resulta 0 (regra 1). O 0 na terceira coluna não é mostrado na diferença pois, não é um bit significativo. Assim a diferença entre 100_2 e 10_2 é 10_2 .

4.3 MULTIPLICAÇÃO

4.3.1 DECIMAL / BINÁRIO

Na multiplicação é possível somar um número a si mesmo tantas vezes quantas forem especificadas pelo multiplicador, sendo assim um método rápido de soma. No entanto, ao multiplicarmos 416_{10} por 113_{10} , iremos usar o método conforme abaixo. Porém, de uma forma abreviada de multiplicação, iremos multiplicar o multiplicando por cada dígito do multiplicador e então soma os produtos parciais para obter o produto final. Iremos observar que, por conveniência os transportes são colocados abaixo dos produtos parciais.

Multiplicando	416
Multiplicador	<u>x 113</u>
Primeiro produto parcial	1248
Segundo produto parcial	416
Terceiro produto parcial	416
Transporte	<u>011</u>
Produto Final	47008

Agora de forma detalhada, iremos verificar a multiplicação decimal:

$$416 \times 113 =$$

$$\begin{array}{r} 4 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 6 \\ \times \quad 1 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \\ \hline 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 \\ 1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 8 \\ 4 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 6 \times 10^1 \\ \hline 4 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 6 \times 10^2 \\ 4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 8 = 47008_{10} \end{array}$$

Na multiplicação binária é utilizada apenas dois possíveis bits multiplicadores (1 ou 0), sendo assim, considerada uma multiplicação mais simples de se resolver, seguindo os mesmos princípios gerais da multiplicação decimal.

Porém, existe regras para multiplicação, conforme abaixo,

$$1) 0 \times 0 = 0$$

$$2) 0 \times 1 = 0$$

$$3) 1 \times 0 = 0$$

$$4) 1 \times 1 = 1$$

Exemplo: $10011_2 \times 1011_2 =$

Multiplicando	$1x2^4 + 0x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 1$
Multiplicador	$\times 1x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 1$
Transporte	$1x2^4 + 1x2^3 + 1x2^2$
Primeiro produto parcial	$1x2^4 + 0x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 1$
Segundo produto parcial	$1x2^5 + 0x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1$
Quarto produto parcial	$1x2^7 + 0x2^6 + 0x2^5 + 1x2^4 + 1x2^3 + 0x2^2$
	$1x2^7 + 0x2^6 + 1x2^5 + 1x2^4 + 0x2^3 + 0x2^2 + 0x2^1 + 1 =$
	10110001_2

Para executar tal multiplicação, é necessário multiplicar o multiplicando por cada bit no multiplicador e somar os resultados parciais. Primeiro multiplica 10011_2 pelo bit multiplicador menos significativo (1) e colocar o produto parcial de tal forma que fique sob o bit multiplicador. Porém, no terceiro produto parcial podemos observar que ao multiplicar o multiplicando pelo bit multiplicador (0) irá resultar num produto parcial 0. No entanto, ao somarmos o terceiro produto parcial com o quarto produto parcial iremos obter que o quarto produto parcial é idêntico ao multiplicando. Uma vez que o sistema numérico contém apenas 1 e 0, o produto parcial será sempre igual ao **multiplicando** ou **zero**. Observe que a multiplicação binária é um processo de deslocamento e soma. Para

cada bit 1 no multiplicador você copia o multiplicando. Pode-se ignorar qualquer zero no multiplicador. Mas, é preciso tomar cuidado para não colocar o multiplicando sob o bit 0.

4.4 DIVISÃO

4.4.1 DECIMAL / BINÁRIA

A divisão é um procedimento para se saber quantas vezes um número pode ser subtraído de outro, ou seja, o reverso da multiplicação. O processo com qual você provavelmente está familiarizado é chamado “divisão longa”.

No exemplo abaixo iremos perceber que o divisor é maior em valor, ou seja, o quociente é 0. A seguir, notaremos os dois dígitos mais significativos. Novamente o divisor é maior, assim o quociente é zero novamente. Finalmente, notaremos o dividendo inteiro e descobre que é aproximadamente, 3 vezes o divisor em valor. Logo, daremos ao quociente o valor de 3. A seguir, subtrai o produto de 65 por 3 (195) do dividendo. A diferença de um representa a fração do divisor. Esta fração é acrescentada ao quociente para resultar a correta resposta 31/65. Se você está para dividir 196 por 65, você obterá o quociente 31/65, como mostra abaixo.

$$\begin{array}{r}
 \text{dividendo } 196 \overline{) 65} \text{ divisor} \\
 \underline{195} \quad 003 \text{ quociente} \\
 1 \text{ resto}
 \end{array}$$

Agora iremos mostrar de forma detalhada em decimal:

$$\begin{array}{r}
 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6 \quad \overline{) 6 \times 10^1 + 5 \times 10^0} \\
 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 5 \quad \quad 3 \times 10^0 \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

A divisão binária é um processo mais simples desde que a base é dois, em vez de dez. Primeiro, vamos dividir 101_2 por 10_2 . Iremos observar que ao encontrarmos o valor que determina o número de bits requerido para exceder o valor do divisor, colocaremos 1 no quociente e subtrair o divisor do valor do dividendo selecionado. Sendo assim, iremos transportar o próximo bit mais significativo do dividendo para o atual resto.

$$\begin{array}{r}
 \text{Dividendo} \quad 1x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0 \quad \left| \begin{array}{l} 1x2^1 + 0x2^0 \text{ Divisor} \\ 1x2^1 + 1x2^{-1} \text{ Quociente} \end{array} \right. \\
 \underline{1x2^2 + 0x2^1 + 0x2^0} \\
 0x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0 \\
 \underline{1x2^0 + 0} \\
 0x2^2 + 0x2^1 + 0x2^0 + 0 \quad \text{Resto}
 \end{array}$$

Se você puder subtrair o divisor do resto coloque 1 no quociente e subtraia, senão, transporte o próximo bit mais significativo do dividendo para o resto e ponha 0 no quociente. Se o divisor puder ser subtraído do novo resto então coloque um 1 no quociente e subtraia o divisor do resto.

Continue o processo até que todos os bits do dividendo tenham sido considerados. Então expresse qualquer resto como uma fração do divisor. Você pode verificar a resposta convertendo os números binários para decimal.

ATIVIDADES:

1) Calcular as operações abaixo:

a) $101011_2 + 1101_2$

b) $101011_2 - 11101_2$

c) $2017 / 199$

d) $1101_2 / 111_2$

e) $(0,11010)_2$ na base 10 (4 casas decimais)

f) $5347_8 \times 11011_2$

Resposta;

$$\begin{array}{r}
 1x2^4 \\
 1x2^3 \\
 1x2^2 \\
 1x2^1 \\
 1x2^0 \\
 \hline
 1x2^5 + 0x2^4 + 1x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0 \\
 + 1x2^3 + 1x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0 \\
 \hline
 1x2^5 + 1x2^4 + 1x2^3 + 0x2^2 + 0x2^1 + 0x2^0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 0x2^5 \\
 1x2^4 \\
 2x2^3 \\
 2x2^2 \\
 \hline
 1x2^5 + 0x2^4 + 1x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0 \\
 - 1x2^4 + 1x2^3 + 1x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0 \\
 \hline
 0x2^5 + 0x2^4 + 1x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0
 \end{array}$$

e) $(0,11010)_2$ para base 10 com 4 casas decimais,

$$1/2^1 + 1/2^2 + 0/2^3 + 1/2^4 + 0/2^5 = 0,5 + 0,25 + 0 + 0,0625 = 0,8125_{10}$$

$$\begin{array}{r}
 1 \times 10^3 \quad 9 \times 10^2 \\
 \text{c) } 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 7 \times 10^0 \\
 \hline
 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 9 \times 10^1 \\
 \hline
 1 \times 10^1 \quad 10 \times 10^0 \quad 10 \times 10^{-1} \\
 0 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 7 \times 10^0 \\
 \hline
 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0 + 9 \times 10^{-1} \\
 \hline
 6 \times 10^0 \quad 10 \times 10^{-1} \quad 10 \times 10^{-2} \\
 7 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} \\
 \hline
 3 \times 10^0 + 9 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2} \\
 \hline
 3 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}
 \end{array}$$

Prova Real

$$\begin{array}{r}
 1 \times 10^0 \quad 1 \times 10^{-1} \\
 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} \\
 \hline
 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 9 \times 10^0 \\
 \hline
 1 \times 10^2 \quad 9 \times 10^1 \quad 1 \times 10^0 \quad 0 \times 10^{-1} \quad 8 \times 10^{-2} \\
 9 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0 + 8 \times 10^{-1} \\
 \hline
 1 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 2 \times 10^0 \\
 \hline
 1 \times 10^{-1} \\
 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 8 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2} \\
 \hline
 3 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} \\
 \hline
 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 0 \times 10^{-1} + 0 \times 10^{-2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
2x^2 \quad 2x^1 \\
d) \quad 1x^3 + 1x^2 + 0x^1 + 1x^0 \quad \left| \begin{array}{l} 1x^2 + 1x^1 + 1x^0 \\ \hline 1x^0 + 1x^{-1} + 1x^{-2} + 1x^{-4} + 1x^{-5} \end{array} \right. \\
\hline
1x^2 + 1x^1 + 1x^0 \\
2x^1 \quad 1x^0 \quad 2x^{-1} \\
0x^3 + 1x^2 + 1x^1 + 0x^0 \\
\hline
1x^1 + 1x^0 + 1x^{-1} \\
1x^0 \quad 2x^{-1} \quad 2x^{-2} \\
1x^1 + 0x^0 + 1x^{-1} \\
\hline
1x^0 + 1x^{-1} + 1x^{-2} \\
0x^{-1} \quad 2x^{-2} \quad 1x^{-3} \quad 2x^{-4} \\
1x^{-1} + 1x^{-2} \\
\hline
1x^{-2} + 1x^{-3} + 1x^{-4} \\
0x^{-2} \quad 1x^{-3} \quad 2x^{-4} \quad 2x^{-5} \\
1x^{-2} + 0x^{-3} + 1x^{-4} \\
\hline
1x^{-3} + 1x^{-4} + 1x^{-5} \\
1x^{-4} + 1x^{-5}
\end{array}$$

Logo, pelo algoritmo da divisão, $a = bq + r$ (conforme citado no Capítulo III), temos :

$$\begin{aligned}
& (1x^2 + 1x^1 + 1x^0) \times (1x^0 + 1x^{-1} + 1x^{-2} + 1x^{-4} + 1x^{-5}) + (1x^{-4} + 1x^{-5}) = \\
& 1x^3 + 1x^2 + 0x^1 + 1x^0
\end{aligned}$$

CAPÍTULO V

CURIOSIDADES: COMPARANDO SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

5.1 OS NÚMEROS DO ANTIGO EGITO.

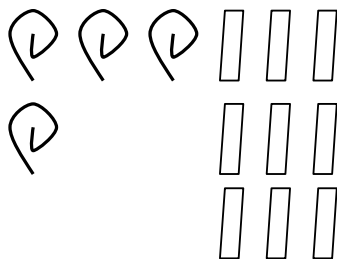
Da civilização egípcia, restaram vários monumentos com inscrições, além de documentos em papiros. Essas fontes permitiram que os arqueólogos decifrassem o sistema de numeração egípcio. Você também pode decifrá-lo. Observe estes exemplos:



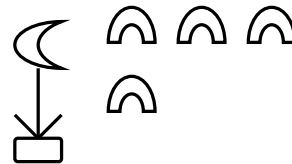
21



325



409



1040

Já percebeu uma lógica nesse sistema, não é? Então, aceite este pequeno desafio: observe a seguir os símbolos que os egípcios usavam para os números e escreva como eles 13, 23 e 123.

	1	Um traço vertical indicava a unidade.
	10	Esse sinal indicava a dezena.
	100	Uma corda enrolada indicava a centena.
	1000	A flor de lótus (o lótus era uma planta sagrada no Egito) representava o milhar.
	10 000	O desenho de um dedo dobrado era o símbolo para dez mil.
	100 000	Um girino representava cem mil.
	1 000 000	Uma figura humana ajoelhada, com as mãos para o alto, indicava o milhão.

13 -



23 -



123 -



Observe que em vez de escrever 10 com dez risquinhos, os egípcios escreviam desta maneira:



Isso significa que um símbolo  valia por dez símbolos . Da mesma forma, dez símbolos  eram substituídos por um  e assim por diante.



Notou que, na escrita dois números, os egípcios formavam grupos de dez do mesmo modo que fazemos hoje? Em nosso sistema de numeração, dez unidades formam a dezena; dez dezenas formam a centena e assim por diante, como ocorre também no sistema egípcio.

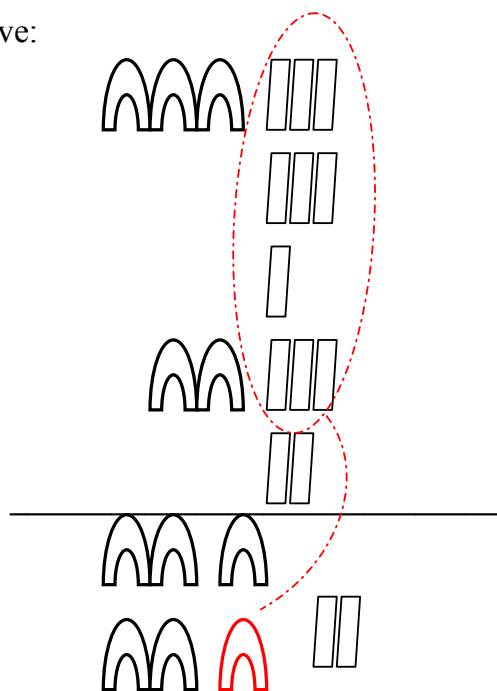
Isso quer dizer que o sistema egípcio era decimal como o nosso, ou, em outras palavras, era um sistema de base dez.

É interessante fazer uma adição usando nossa escrita dos números e, depois, a dos egípcios. Veja como é feita com nossos algarismos:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 37 \\ +25 \\ \hline 62 \end{array}$$

O pequeno 1 sobre o 3 indica a troca de dez unidades por uma dezena, é o chamado “vai um”. Algumas crianças pequenas têm dificuldade em entender esse procedimento, pois não compreendem essa troca. No entanto, no sistema egípcio, a conta ficaria mais fácil para elas porque podem “ver” a troca de dez unidades pela dezena .

Observe:

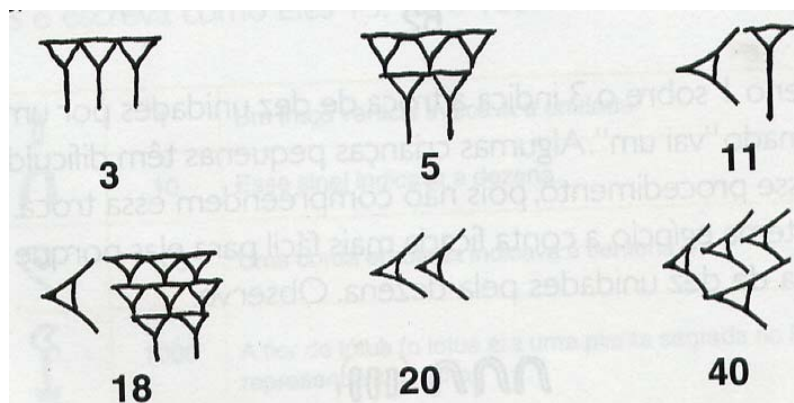
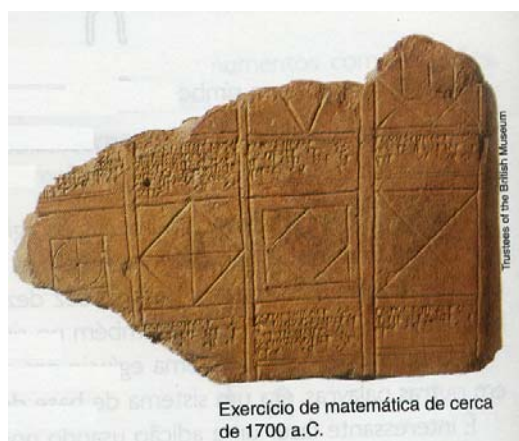


5.2 O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DA MESOPOTÂMIA.

Nas escavações arqueológicas, realizadas na região onde foram edificadas as cidades da Mesopotâmia, encontraram-se milhares de placas de barro que continham inscrições. Usado um bastonete, os escribas da Mesopotâmia escreveram sobre essas

placas quando o barro ainda estava mole. Depois elas foram cozidas no forno para endurecer.

Com bases nessas placas, foi possível decifrar o sistema de numeração mesopotâmico. O sinal ∇ indica 1 e o sinal $\leftarrow$, 10. veja a escrita de alguns números:



Parece com o sistema egípcio, não é?

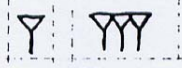
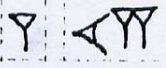
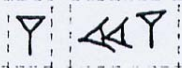
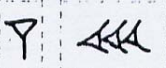
Parece, mas somente no início. Uma das placas de argila encontradas nas escavações continha os resultados da tabuada de nove. Vamos mostrar um desenho dessa placa e você vai ter uma surpresa. Examine com atenção:

Escrita mesopotâmica		Em nosso sistema	
∇	$\nabla \nabla \nabla$	1	9
$\nabla \nabla$	$\leftarrow \nabla \nabla$	2	18
$\nabla \nabla \nabla$	$\leftarrow \leftarrow \nabla \nabla$	3	27
$\nabla \nabla \nabla \nabla$	$\leftarrow \leftarrow \leftarrow \nabla \nabla$	4	36
$\nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	$\leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \nabla \nabla$	5	45
$\nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	$\leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \nabla \nabla$	6	54
$\nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	$\nabla \nabla \nabla$	7	63
$\nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	$\nabla \leftarrow \nabla \nabla$	8	72
$\nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	$\nabla \leftarrow \leftarrow \nabla$	9	81
$\leftarrow$	$\nabla \leftarrow \leftarrow \leftarrow$	10	90

Notou que há algo estranho nos quatro últimos resultados, que correspondem a 63, 72, 81 e 90? Por exemplo, para o 63 esperávamos esse registro, mas o que se vê é

você pode imaginar uma explicação para isso?

Acontece que eles usavam um sistema de numeração de base sessenta, o que parece muito esquisito. Veja o significado dos últimos resultados da tabuada do nove:

$60 + 3$  63	$60 + 12$  72
$60 + 21$  81	$60 + 30$  90

Agora é mais fácil perceber o que queremos dizer com numeração de base sessenta. Vamos comparar com a numeração egípcia:

- Na numeração egípcia  significa um grupo de dez mais três;
 - Na numeração mesopotâmica significa um grupo de sessenta mais três.
- Repare que o símbolo da esquerda, separado por outros três, vale sessenta.

É verdade que o sistema de numeração dos povos da Mesopotâmia desapareceu há muito tempo, mas restaram vestígios dele, por exemplo, na contagem do tempo, como você sabe, sessenta grupos compõem um minuto, e sessenta minutos compõem uma hora. Essa contagem em grupos de sessenta é herança da antiga numeração de base sessenta.

Assim, a escrita 1:3 que você vê nos relógios digitais ou nos do forno de microondas, não significa 130 minutos nem 1,30 hora. Note que 1:30 significa 90 minutos ou 1,5 hora. Isso porque o 1 antes dos dois-pontos corresponde a 60 minutos.

5.3 A NUMERAÇÃO CHINESA.

Na longa história da civilização chinesa, houve mais de um sistema numérico. O mais utilizado deles tinha estes símbolos:

一	1	六	6	十	10
二	2	七	7	百	100
三	3	八	8	千	1000
四	4	九	9	萬	10000
五	5				

Esses símbolos ainda hoje são conhecidos tanto na China como no Japão. No entanto, para fazer cálculos, todos usam o mesmo sistema de numeração que nós.

O antigo sistema de numeração chinesa tem regras interessantes. Veja os exemplos:

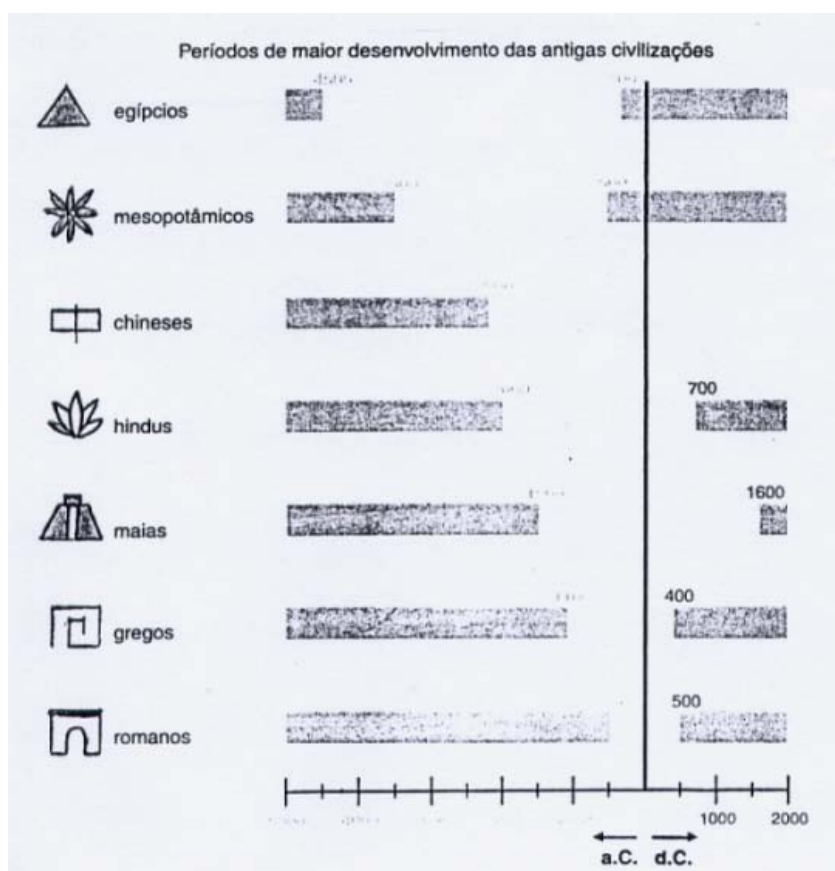
oitocentos e vinte e quatro	cinco mil e noventa e sete
八百二十四	五千九十七
8 100 2 10 4	5 1000 9 10 7
$8 \times 100 + 2 \times 10 + 4$	$5 \times 1000 + 9 \times 10 + 7$

Percebeu que é um sistema decimal e que tem semelhança com o nosso sistema? Compare a nossa maneira de escrever 824 com a deles. Notou que a idéia é a mesma? A diferença é que, no nosso caso, o 100 e o 10 ficam “escondidos”, não aparecem na escrita 824. As civilizações mencionadas não foram as únicas de sua época, mas as maiores. Depois delas, destacaram-se, na Europa, as civilizações gregas e romana e, na Ásia, o império Persa.

O império Romano, que estava no auge nos primeiros séculos depois de Cristo, havia anexado o Egito e a Grécia a seu território. Os romanos incorporaram as culturas dos gregos, os quais já se tinham valido da cultura dos egípcios. Eles chegaram a ocupar os territórios que hoje são de Portugal, Espanha, França e Itália, além de parte da Inglaterra. A cultura e a língua de todos esses países foram influenciadas pelos romanos. Essa influência estendeu-se também para as Américas, para o Brasil em particular, uma vez que fomos colonizados por espanhóis e portugueses.

Na América, também formaram-se civilizações importantes, que não tiveram tanto contato com as civilizações da Europa. As mais conhecidas foram a dos maias, a dos incas e a dos astecas. Muitas dessas civilizações americanas foram destruídas pelos europeus, quando vieram ocupar as Américas.

Para você não se confundir com os muitos nomes que estão aparecendo, vamos apresentar uma linha do tempo. Este esquema mostra os períodos de existência das civilizações que mencionamos:



5.4 A NUMERAÇÃO GREGA.

A cultura grega faz parte de nossa civilização ocidental. Foi nessa civilização que se organizaram pela primeira vez diversas ciências, como a medicina e a matemática. Até nos esportes seguimos os gregos: eles criaram as Olimpíadas.

Curiosamente, em contraste com a relevância de suas criações, o sistema de numeração estabelecido pelos gregos, em que usavam as letras de seu alfabeto para representar os números, não influenciou outros povos. Para você ter uma idéia de como era o sistema de numeração grega, veja alguns desses símbolos:

Letra	Nome da letra	Valor
α	alfa	1
β	beta	2
γ	gama	3
δ	delta	4
ϵ	epsilon	5
	•	
	•	
	•	
ι	iota	10
κ	capa	20
λ	lambda	30
μ	mi	40
	•	
	•	
	•	
ρ	rô	100
σ	sigma	200
τ	tau	300
	•	
	•	
	•	

Observe como escreviam alguns números:

$\lambda \alpha$	$\sigma \mu \epsilon$	$\rho \delta$
31	245	104

5.5 A NUMERAÇÃO ROMANA

Por sua vez, o sistema numérico romano não desapareceu por completo. Em nosso cotidiano, podemos ver os seus sinais em relógios ou nas fachadas de prédios antigos em que há a data da construção.

- Se o símbolo de menor vem antes do de maior valor ou vem entre dois símbolos de valores, faz-se uma subtração:

Exemplos: $IV = 5 - 1 = 4$

$$XL = 50 - 10 = 40$$

$$CD = 500 - 100 = 400$$

$$XIX = 10 + (10 - 1) = 19.$$

$$DXL = 500 + (50 - 10) = 540.$$

- Colocando-se um traço sobre o símbolo, seu valor é multiplicado por 1000:

Exemplo: $\overline{V} = 5000$

É verdade que a numeração romana tem muitas regras: no entanto, você não precisa saber tudo de cor. Basta ter uma idéia do assunto e consultar este livro – IMENES, L.M & LELLIS, Marcelo - “*Os números na história da civilização*” - quando quiser relembrar algum detalhe.

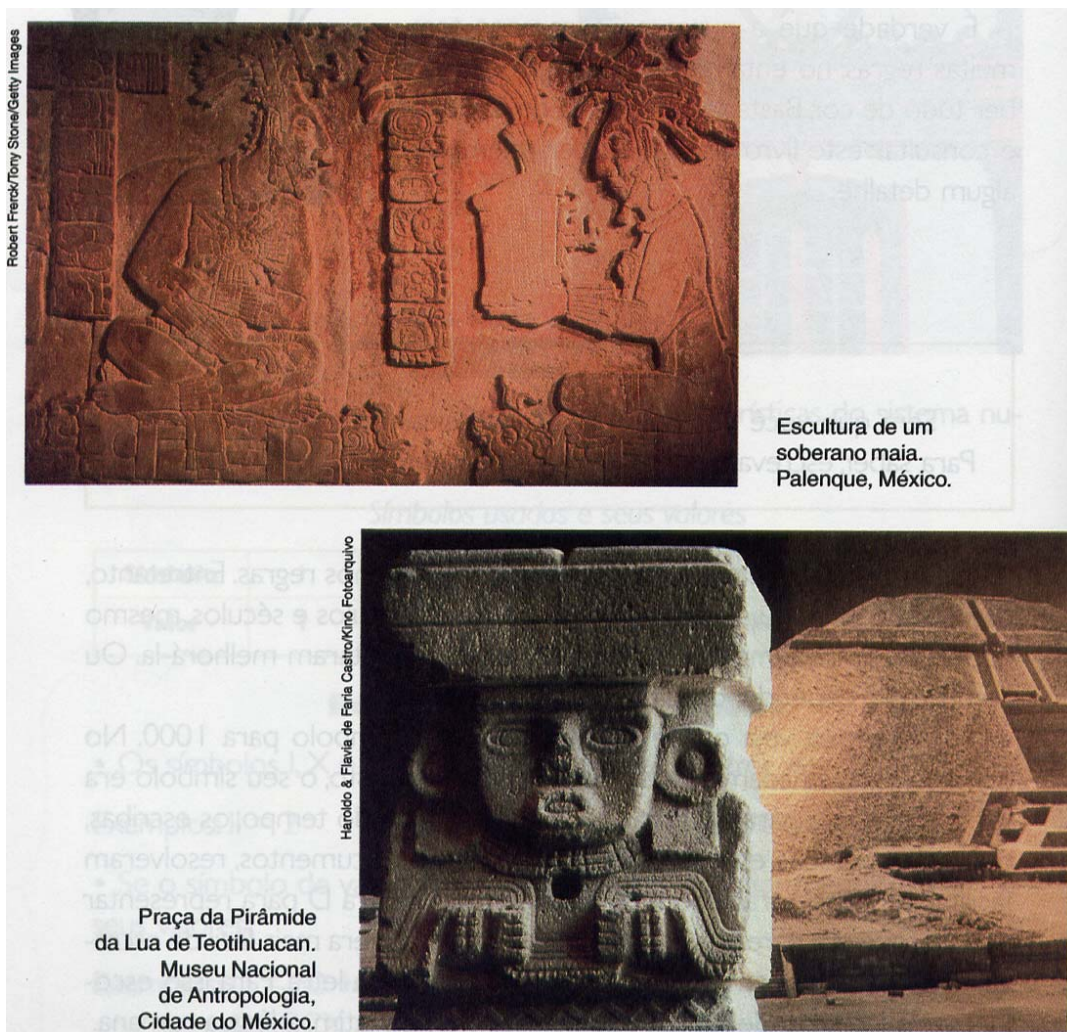
Na antiguidade, a numeração romana tinha menos regras. Entretanto, como ela continuou a ser usada na Europa por séculos e séculos, mesmo depois do fim do Império Romano, as pessoas tentaram melhorá-la. Ou complicá-la, dependendo da opinião de cada um.

Por exemplo, veja o que aconteceu com o símbolo para 1000. No começo, aproximadamente 300 anos antes de Cristo, o seu símbolo era . E o símbolo para 500 era . Com o passar do tempo, os escribas, que eram pessoas especializadas na escrita de documentos, resolveram facilitar o próprio trabalho e passaram a usar a letra D para representar 500, porque era parecida com o símbolo original e era mais fácil de

escrever. Trocaram também o símbolo do 1000 por uma letra. Para isso, escolheram o M, inicial de “mile”, que significa “mil” em latim, a língua romana.

5.6 OS MAIAS E O NÚMERO ZERO.

Já examinamos vários sistemas de numeração. Você deve ter notado que nenhum deles usava o zero, que é tão importante em nosso sistema. Mas há um sistema antigo em que se utilizava o zero. É o sistema dos maias. Esse povo, que habitou a América Central durante mais de mil anos, desenvolveu uma cultura sofisticada. Eles criaram um sistema de escrita bastante evoluído e também calendários muito preciosos.



Além disso, os maias desenvolveram um sistema de numeração complexo. Por essa razão, vamos mostrá-lo apenas em parte. Veja a seguir a representação dos primeiros números:

• 1	••••• 6	••••• 11	••••• 16
•• 2	••••• 7	••••• 12	••••• 17
••• 3	••••• 8	••••• 13	••••• 18
•••• 4	••••• 9	••••• 14	••••• 19
— 5	••••• 10	••••• 15	

E agora, percebeu o padrão? Adivinhe a continuação : qual era o símbolo para o 20? Seria este?



Não, não era essa a maneira de representar o 20. Era desta forma:



A concha representava o zero. Agora, observe a representação de mais alguns números

20
um
o

									
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

	$\begin{array}{r} 1 \times 20 \\ + 19 \\ \hline = 39 \end{array}$		$\begin{array}{r} 2 \times 20 \\ + 0 \\ \hline = 40 \end{array}$
---	---	---	--

	$\begin{array}{r} 3 \times 20 \\ + 6 \\ \hline = 66 \end{array}$		$\begin{array}{r} 5 \times 20 \\ + 0 \\ \hline = 100 \end{array}$
---	--	---	---

depois do
para
entender
pouco mais
sistema:

5.7 O MELHOR SISTEMA DE NUMERAÇÃO.

As pessoas costumam preferir aquilo a que estão acostumadas. Se você mostrasse para um chinês da antiguidade o sistema de numeração egípcio ou mesopotâmico, ele preferiria o sistema chinês. Por isso, é difícil dizer qual o melhor sistema de numeração. Nós, é claro, achamos melhor o nosso.

No entanto, há um fato interessante: todos os sistemas de numeração que vimos acabaram desaparecendo. Foram substituídos pelo sistema que usamos e que o mundo usa. Portanto, talvez possamos dizer que nosso sistema é o melhor, não porque gostamos dele, mas porque ele substituiu os outros.

É um sistema que tem o zero, é decimal e também posicional. Pois bem, qual foi a civilização que criou esse sistema?

Das grandes civilizações antigas, houve uma que apenas citamos e foi nela que nasceu o nosso sistema. É a antiga civilização da Índia.

Nosso sistema surgiu lá, mas não foi criação de um só homem nem apenas dos povos da Índia. Ele foi sendo aperfeiçoado e difundido ao longo de séculos, com a colaboração de vários povos, em especial dos árabes. Por isso mesmo é chamado de sistema de numeração indo-arábico.

BIBLIOGRAFIA:

GEORGES, Ifrah – *História Universal dos Algarismos* – Vol. 1 – ed. Nova Fronteira

IMENES, L.M & LELLIS, Marcelo – *Os números na história da civilização* – 12 – ed. São Paulo: Scipione, 1999

MILIES, C. P. e PITTA, S.C. - *Números – Uma Introdução à Matemática*, 3ed. – São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001. (Acadêmica; 20)

ANGIOLIN, A. G. e FELINTO, M.S. – *Sistema de Numeração – Monografia da disciplina : Pesquisa Matemática II* – Unifieo, 2º semestre/2004

Sites:

<http://venus.rdc.puc-rio.br/rmano/sn.html>

http:// www.facers.br/alunos/material/Andrea0091/

CIRCUITOS _LÓGICOS_1pdf

<http://www.ti.com/calc/pdf/gb/pt/8920-por.pdf>

<http://www.inf.ufsm.br/~cacau/elc202/node4.html>

Apostila:

Sistema de Numeração - PEC – Programa de Educação Continuada - Secretaria de Estado da Educação - CAEM – Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática – IME-USP, 1º Semestre/1998